DE
MOTU CORPORUM
EX
GRAVITATE.

RESPONDEBIT

D. AUGUSTINUS AB AURIA

E DUCIBUS MASSÆ NOVÆ

NOB. GENUENSIS

In Mutinens. Nobil. Coll. Convictor, atque in Universit. Physic. Auditor.

Biblioteca Antica del Collegio S. Carlo MODENA

C
X
36

MUTINÆ. MDCCLXXXI.

Apud Societatem Typographicam.

Superiorum permiſſu.

THESIS

ACADEMICÆ DISPUTATIONI

PROPOSITA.

CORpora omnia & omnes corporum particulæ tendunt ad ſe invicem Gravitate mutua, quæ eſt quadrato diſtantiarum reciproce proportionalis.

Mutuæ hujus rerum omnium ad ſe invicem appetentiæ, quam Gravitatem dicimus, veſtigia invenias etiam in veteribus Theogoniis, ut celebre illud apud Ariſtophanem in Avibus.

Χάος ἦν καὶ Νὺξ, Ἔρεβός τε μέλαν πρῶτον καὶ Τάρταρος εὐρύς.
Γῆ δ', ȣ̓δ' ἀὴρ, ȣ̓δ' ȣ̓ρανὸς ἦν. Ἐρέβȣς δ' ἐν ἀπείροσι κόλποις
Τίκτει πρώτιςον ὑπηνέμιον Νὺξ ἡ μελανόπτερος ὠόν.
Ἐξ ȣ̓ περιτελλομέναις ὥραις ἔβλαςεν Ἔρος ὁ ποθεινός,
Στίλβων νῶτον πτερύγοιν χρυσαῖν εἰκὼς ἀνεμώκεσι δίναις.
. . . .
Πρότερον δ' ȣ̓κ ἦν γένος ἀθανάτων, πρὶν Ἔρως σύνεμιξεν ἅπαντα
Ξυμμιγνυμένων δ' ἑτέρων ἑτέροις, γένετ' ȣ̓ρανὸς ὠκεανόςτε,
Καὶ γῆ, πάντωντε θεῶν μακάρων γένος ἄφθιτον . . . . .

Paraphraſis Italica.

Terra non v' era ancor, nè Ciel, nè Stelle,
Ma ſol Notte copria con denſo Velo
Le Coſe in un confuſe e il grande Abiſſo.
Quando nel ſen dell' Erebo infinito,
Piacevol Germe della Notte buja,
Volgendo i Tempi, alfin comparve Amore.
Primo Amor d' *ogni Nume entro il profondo*
Abiſſo lampeggiò coi vanni d' oro,
Come Stella che ſtriſcia in grembo all' etra.
Ei ſpirò nell' immenſa inerte maſſa,
Vicendevol deſir, che in dolce nodo
Legò i Semi del tutto; onde poi ſurſe
La Terra, il Mar, le Sfere, e de' beati
Numi il coro immortal . . . . . .

THEO-

THEOREMATA

Ad demonſtrandum propoſita.

THeoriam motus Corporum Gravium excitavit Galileus, deinde promovit Hugenius, Newtonus denique ita perfecit, ut per hanc ipſi mortalium primo aditus patuerit ad cognoſcenda *jura poli, rerumque fidem, legeſque Deorum.* Generalia theoriæ totius fundamenta poſituri agemus primo de exiſtentia Gravitatis, tum de motibus Gravium rectilineis ad centrum, hinc de motibus per lineas obliquas, ac demum de projectilibus. Hic vero procemii loco brevem Coſmographiæ conſpectum petenti aperiemus.

SECTIO PRIMA.

De Exiſtentia Gravitatis.

1.

Planetæ omnes primarii & Cometæ premuntur indeſinenter a Vi urgente eos ad Solem.

2.

Vis hæc in diverſis ejuſdem Orbitæ locis conſiderata variatur pro ratione inverſa duplicata diſtantiarum a Sole.

Pa-

3.

Pariter ſi Vis eadem in diverſorum Planetarum diverſis Orbitis conſideretur; Quantitas ipſius acceleratrix variatur pro ratione inverſa duplicata diſtantiarum a Sole.

4.

Eadem Vis & eædem variationis leges obtinent quoque in Planetis ſecundariis, tum reſpectu ad eorum Primarios, tum reſpectu ad Solem.

5.

Luna Gravis eſt in Tellurem, non ſecus ac reliqua corpora terreſtria.

6.

Datur in Planetas univerſos tum Primarios tum Secundarios Gravitas decreſcens pro ea ratione, qua augetur quadratum diſtantiarum a Centro.

7.

Gravitas corporum ad diverſos Planetas, ceteris paribus, proportionalis eſt *quantitati materiæ*, ex qua ſinguli Planetæ coaleſcunt.

8.

Eadem Gravitas, ceteris paribus, proportionalis eſt etiam quantitati materiæ, quæ continetur in corpore gravi.

9.

Gravitas non eſt unius corporis ad aliud, ſed inter utrumque mutua.

10.

Gravitas mutua duorum corporum inter ſe componitur ex ſumma Gravitatum omnium, quibus ſingulæ utriuſque corporis particulæ ad ſe mutuo tendunt.

11.

Vis qua ſingulæ corporum ad ſe invicem Gravium particulæ in ſe mutuo graves ſunt, quadrato diſtantiæ inter ipſas particulas contraria proportione reſpondet.

SE-

SECTIO SECUNDA.

De Motibus rectilineis ad Centrum.

ETſi in duobus corporibus ſe mutuo petentibus mutuus pariter excitari debeat motus, tamen hic & in ſequentibus ſpectabimus Corpus grave tamquam tendens eadem lege ad punctum immobile: quod ſatis conſtat eſſe centrum commune gravitatis duorum Corporum, quæ ſe invicem petunt. Præterea quamvis in ſuperioribus unica lex Gravitatis cum Newtono conſtituta fuerit comparate ad diſtantiam ab unaquaque particula: tamen, quando plures particulæ coaleſcunt in unicam maſſam, poteſt actio ſic contemperari ex mutua conjunctione, ut Gravitas in totam maſſam alia lege varietur, quam ſeorſim in ſingulas partes. Et revera ex ipſa, quam ſancivimus, lege concluditur, Gravitatem intra Planetas non amplius proportionalem eſſe quadrato diſtantiæ a Centro inverſim, ſed magis diſtantiæ ipſi directe; quam legem Fermatius ubique veram eſſe credidit. In exiguis vero diſtantiæ varietatibus, quales ſunt in ſuperficie Telluris altitudines illæ, in quibus experimenta capere poſſumus, in his, cum Gravitas parum admodum mutetur, haberi poteſt pro Conſtanti; ut Galileus aſſumpſit. Quare demum tres in natura leges locum habent pro Gravitate, comparatim ad diſtantiam: nempe lex Newtoni pro ſingulis particulis, & pro diſtantiis inſigniter variatis extra Planetas; lex Fermatii intra eoſdem Planetas; lex denique Galilei, ubi diſtantiæ contemnenda ſolum quantitate mutantur. Motum itaque Corporum triplici hac lege Gravitatis cadentium recta ad Centrum inquirere pergimus.

1.

Quacumque diſtantiarum lege Gravitas varietur: Velocitas poſt quodcumque ſpatium a Corpore cadente emenſum aquiſita poteſt duplum Areæ, quæ oritur ex Gravitate ducta in Spatium.

2.

Poſita Galilei Lege: Locus Gravitatis, reſpectu ad Spatium a corpore cadente deſcriptum, eſt ad lineam parallelam ſpatio ipſi. Locus autem Velocitatis, reſpectu ad idem Spatium eſt ad Parabolam, cujus Parameter dupla ſit Gravitatis.

3.

Poſita eadem Galilei lege: Locus Temporis, reſpectu ad Spatium, eſt ad Parabolam, cujus Parameter eſt in ratione inverſa Gravitatis. Tempore autem deſcenſus & Velocitate ultimo aquiſita, deſcribitur Spatium duplum deſcenſus.

4.

Poſita Fermatii Lege: Locus Gravitatis eſt ad lineam rectam, quæ per centrum ducitur; Locus autem Velocitatis eſt ad Ellipſim, cujus Parameter dupla ſit Gravitatis in ea *diſtantia*, ex qua incipit deſcenſus.

5.

Poſita eadem Lege: Locus Temporis reſpectu ad Spatium erit ad Curvam Sinuum. Baſis curvæ hujus erit Quadrans circuli habens pro radio diſtantiam illam, quæ eſt in ratione inverſa Gravitatis ſibi reſpondentis: Tota vero Curva in altitudinem protracta eſt, aut contracta ad uſque eam diſtantiam, ex qua incipit deſcenſus.

6.

Poſita eadem lege: Tempora deſcenſus ex quacumque altitudine ad Centrum uſque ſunt æqualia. Tempus vero deſcenſus uſque ad Centrum eſt ad Tempus deſcenſus per di-

dimidiam altitudinem juxta legem Galilei, ut quadrans circumferentiæ ad radium.

7.

Poſita lege Newtoni: Locus Gravitatis eſt ad hyperbolam Cubicam: Locus autem Velocitatis eſt ad hyperboliſmum Conchoidalem Ellipſeos, cujus axis ſit diſtantia a Centro, ex qua incipit deſcenſus, parameter vero dupla eſt Gravitatis in Diſtantia eadem.

8.

Poſita eadem lege: Locus Temporis eſt ad Cicloidem protractam in ratione inverſa axis ſecundi Ellipſeos antea deſcriptæ.

9.

Si Corpus cadat lege Newtoni uſque ad dimidiam a centro diſtantiam; hinc porro aliud corpus cadat lege Fermatii per reliquam a Centro diſtantiam; & tertium denique hinc pariter lege Galilei cadat per dimidium dimidiæ ipſius: Velocitates his tribus Deſcenſibus aquiſitæ erunt æquales.

SECTIO TERTIA.

De Gravium deſcenſu per lineas obliquas.

Conſideratio hujuſmodi motuum uſum habet tantummodo per Spatia valde brevia: quare in his omnibus unicam aſſumemus Galilei legem, in qua ſupponitur Gravitas conſtans eſſe, & parallela ſibi.

1.

Dum Corpus per Canalem Curvilineum movetur, nihil velocitatis ſuæ amittit ex inflexione itineris per varia Curvæ puncta.

2.

Si Corpus vi Gravitatis urgente deſcendat per Planum ali-

quod inclinatum: Tempus deſcenſus variabitur in ratione compoſita ex directa longitudinis Plani, & inverſa ſubduplicata altitudinis.

3.

Sive deſcenſus fiat per Planum inclinatum, ſive per Curvam; *Velocitas in fine deſcenſus* erit eadem, ac ſi deſcenſu perpendiculari ex eadem altitudine aquiſita fuiſſet.

4.

Deſcenſus ex quiete per Arcum circuli minorem ſextante *abſolvitur* expeditius, quam per aliam quamlibet Curvam jacentem intra eundem arcum.

5.

Corpus grave a termino ad terminum inferius & oblique poſitum breviſſimo tempore deſcendit, ſi per Cicloidem deſcendat.

6.

Si *axis Curvæ*, per quam Corpus *cadit*, *parallelus ſit* Gravitati; Corpus per *alterum* ex *Curvæ* ramis *deſcendens*, movebitur porro in altero ramo, iiſdem temporibus & Velocitatibus, ſed ordine inverſo.

7.

Si Corpus Grave a filo flexili pendulum oſcilletur intra duas Semicicloides æquales, harum Evolutione deſcribet *aliam Cicloidem evolutis æqualem*.

8.

Omnes Oſcillationes in Cicloide ſunt Iſochronæ. Tempus autem Oſcillationis in Cicloide eſt ad tempus deſcenſus liberi per axem, ut circumferentia ad diametrum.

9.

In Oſcillationibus Pendulorum excurrentium per arcus Cicloidis, Quadrata temporum ſunt in ratione compoſita ex directa longitudinis pendulorum, & inverſa Gravitatis.

10.

10.

In Oſcillationibus pendulorum excurrentium per arcus ſimiles Curvarum ſimilium, & ſimiliter poſitos quo ad Horizontem, Quadrata temporum ſunt directe ut latera homologa earundem Curvarum, inverſe vero ut Gravitas.

11.

Sint duo Pendula oſcillantia, alterum quidem in Cicloide, alterum vero in Arcu circuli oſculantis Cicloidem in vertice, minore tribus gradibus. Differentia Temporum inter alterutram oſcillationem habebit ad Tempus in Circulo rationem minorem ea, quam habet reſpondens Sinus verſus ad ſexdecuplum Radii.

SECTIO QUARTA.

De motu Projectilium.

NOnnulla huc ſpectantia locum invenerunt in Sectione prima; quapropter iis nunc repetendis ſuperſedemus. Præſcindimus autem hac & duabus præcedentibus Sectionibus a Reſiſtentia medii, rem conſiderantes in vacuo. Dum enim Intellectus humanus de ſubjecto aliquo ſibi ſcientiam condit, illud in ſuo quodammodo apice deprehendit, peculiares negligens varietates, quibus unuſquiſque individuus caſus diſtinguitur. Sic Cicero perfectum Oratorem conſiderat, Stoici perfectum Sapientem, & Geometræ Circulum perfectum: quæ ſunt τὰ ἀεὶ ὄντα Platonis. Reſiſtentia porro medii peculiarem ſibi vindicat tractationem.

1.

Poſita quacumque lege Gravitatis: Si corpus recta aſcendat vel deſcendat, & Corpus aliud projectum moveatur utcumque, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium

altitudinum Caſu æquales; erunt in omnibus aliis æqualibus altitudinibus pariter æquales.

2.

Si Gravitas eſt parallela ſibi, Corpus projectum ibit per angulum Parallelogrammi, cujus alterum latus projectioni reſpondet, alterum vero deſcenſui Gravitatis.

3.

Si Gravitas ſit conſtans & parallela ſibi, Corpus oblique ad directionem Gravitatis projectum movebitur in Parabola.

4.

Iiſdem poſitis: Velocitas Projecti in quocumque puncto Parabolæ erit ea, quæ aquiſita fuiſſet deſcenſu libero per quartam partem Parametri eidem puncto reſpondentis. Tempus vero per quemcumque arcum ejuſdem Parabolæ *eſt illud idem*, quo Corpus moveretur per abſciſſam arcui *illi reſpondentem*.

5.

Iiſdem poſitis. Quadruplum altitudinis projectionem generantis eſt ad diſtantiam Scopi, ut Quadratum ſinus declinationis Scopi eſt ad rectangulum ſinuum Elevationis & Declinationis tormenti.

6.

Si *Gravitas tendit ad centrum*, *Corpus* movebitur in Circulo: dummodo projectio fiat perpendiculariter ad radium vectorem, velocitate ea, quæ aut juxta legem Fermatii aquiſita fuiſſet cadendo uſque ad centrum, aut lege Galilei cadendo per dimidum radium, aut lege Newtoni cadendo ex dupla a Centro diſtantia uſque ad locum projectionis.

7.

Si *Gravitas ſit inverſim* ut Quadrata diſtantiarum a Centro, & Velocitas projectionis ea fuerit, quæ ex finita alti-

titudine uſque ad locum projectionis cadendo aquiritur, movebitur Corpus in Ellipſi.

8.

Poſita quacumque lege Gravitatis tendentis ad Centrum: Si corpus projectum ita moveatur, ut Curva ab ipſo deſcripta fiat alicubi perpendicularis radio Vectori, movebitur inde Corpus in alio ramo Curvæ, qui ſimilis ſit priori, & ſimiliter poſitus.

9.

Corporum duorum Gravitate ſe mutuo petentium, ſi unum projiciatur, revolventur ambo in figuris ſimilibus circa centrum commune Gravitatis deſcriptis.

S C H O L I U M.

Cur in phyſicis nuda veritatis expoſitio ſimplici demonſtrationi conjuncta nobis placeat magis, quam contentioſa veterum Diſputatio, dictum eſt alias: Hic tamen, in noſtræ methodi confirmationem, duo graviſſima ſane exempla ſubnectere juvat. Primum eſt Graveſandii, cujus hæc ſunt verba in Præfat. ad Phyſices Elementa, quæ celeberrimus Auctor in Leydenſi Univerſitate inſigni prorſus doctrinæ fama tradebat. „Non animus unquam mihi fuit, „ nec adhucdum eſt, cum ullo, utcumque provocatus in „ arenam deſcendere, ut de Veritate contendam..... Noſtro labore quiſque pro arbitrio utatur, & ne nos ad „ reſpondendum objectionibus quæ proponi poterunt, devinctos credat. Quamdiu illa pro veris habebimus quæ „ ſcripſimus, nos jure ſilere poſſe perſuaſum habemus". Alterum exemplum eſt Newtoni ipſius, qui in Præfatione ad lib. 3. Princip., in quo hanc ipſam Gravitatis theoriam evolvit, ſic ait. „De hoc argumento compoſueram „ librum tertium methodo populari ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia ſatis intellecta non fuerint,

ii vim

„ ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præ-
„ judicia deponent, quibus a multis retro annis inſueve-
„ runt; & propterea, ne res in diſputationes trahatur,
„ ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones more ma-
„ thematico". Sed pudet his diutius immorari, ne videatur ſana philoſophiæ methodus, tardius quam par eſt, in ceteroquin cultiſſimas regiones penetrare. „ Non ca-
„ nimus Surdis, reſpondent omnia Silvæ".



JOHANNES BAPTISTA VENTURI

INCLITO ADOLESCENTI

D. AUGUSTINO AB AURIA

JOSEPHI MASSÆ NOVÆ DUCIS FILIO

S. P. D.

Cum ſuperioribus menſibus noſtrum una in Mechanicis ſtudium poſuiſſemus, ſæpius tibi, Auguſtine mi, ſignificavi, multa in ea Scientia planius, quam hucuſque factum ſit, demonſtrari poſſe, multa vero etiam plenius. Horum nonnulla, quæ propter novitatem vel argumenti ipſius vel methodi aliqua elegantiæ ſpecie ſe præ ceteris commendare videbantur, conjeci in Commentariolum iſtud. Quod tibi nunc trado, primum ut ne illa effluere ſinas ex animo, deinde ut publicum amoris in te mei teſtimonium habeas, demum ut omnes tuum intelligant in ardua ſane diſciplina profectum. Et me quidem commemoratio tuæ virtutis mirifice delectat; tibi vero elaborandum ſupereſt, ut eximiam illam, quam concitaſti, expectationem ingenii tui, in poſterum ſuſtineas, ac tuearis.

I.

I.

De Gravium deſcenſu per Circulum.

Dixit Galileus deſcenſum Gravium a termino ad terminum per circuli portionem expeditiſſime abſolvi. Quod quamvis nec ipſe probaverit, niſi comparate ad poligonum circulo inſcriptum; quinimmo etſi demonſtraverit Joh. Bernoullius deſcenſum breviſſimo tempore fieri per Cicloidem; hic nihilominus oſtendetur Galilei ſententiam propius, quam vulgaris ferat opinio, abeſſe a veritate.

THEOREMA I.

Deſcenſus ex quiete per arcum Circuli ACB (*a*) *minorem ſextante abſolvitur citius, quam per aliam quamlibet Curvam* ADB, *jacentem intra eundem Arcum.*

Eſto E centrum Circuli; EB radius perpendicularis ad Horizontem FA; CH, DT arcus circulares evaneſcentes, a radiis EDC, ESTH infinite proximis definiti. Erigatur CZ normalis ad AF, & poſita $ME = CZ$, agantur ZM, ZE; deinde erecta altera normali DXRQ, capiatur DO media geometrice proportionalis inter DX & DQ, ſeu inter DX & CZ.

Quoniam arcus $ACB < 60°$, idcirco $BF < FE$; eſt autem ME ſeu $CZ < BF$; igitur $ME < EF$. Ergo in triangulo MFZ eſt etiam $QR < RX$; ideoque DR major eſt, quam media Arithmetica inter DX & DQ; & a fortiori major, quam media Geometrica DO. Hinc vero $CZ : DR < CZ : DO$; cumque ſit $CZ : DR = CE : DE$

 =

(*a*) Fig. 1.

$=$ CH : DT, propterea CH : DT $<$ CZ : DO; atqui in triangulo DST hypotenuſa DS $>$ DT; ergo a fortiori CH : DS $<$ CZ : DO. Nunc quoniam deſcenſus incipit ex quiete in A, Velocitas a Corpore cadente acquiſita in C eſt ad Velocitatem in D, ut CZ : DO; proinde CH : DS $<$ Velocitas in C ad Velocitatem in D; & viciſſim CH : Velocitatem in C $<$ DS : Velocitatem in D. Ergo Tempus per CH brevius eſt Tempore per DS. Et propterea Tempus per totum ACB brevius eſt Tempore per totam ADB. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Ponatur arcus ACB major ſextante, Curva autem ADB jaceat intra circulum, donec duplicatur Coſinus EF, atque hinc porro extra Circulum progrediatur. Eodem modo probabitur Tempus in Circulo brevius eſſe Tempore per Curvam: ſive deſcenſus pertingat uſque ad B, ſive alio quocumque vel Radio vel Radii puncto finiatur.

Coroll. 2. Quadrans Circuli brachiſtochronus eſt omnium Curvarum extra ipſum jacentium; ſextans vero brachiſtochronus omnium jacentium intus.

Coroll. 3. Sit nunc ACB non Circulus, ſed alia quælibet Curva. Si radius Oſculi CE ita ſemper poſitus fuerit, ut per totam Curvam ſit CZ $<$ EF; hæc erit brachiſtochrona omnium interiorum: E contra ſi CZ $>$ EF, Curva erit Brachiſtochrona exteriorum. Ex. gr. ſi filum, cujus evolutio generat Ellipſim, decurtetur pluſquam dimidia parametri principalis parte, *Curva ſic Condeſcripta* Ellipſeos erit interiorum brachiſtochrona: erit vero exteriorum, ſi condeſcribatur a filo protracto pluſquam dimidia parte differentiæ qua axis minor exceditur a Parametro ſua.

Coroll. 4. Sit ACB Ciclois; erit ſemper radius oſculi CE biſectus a *baſi* FA, & DR erit media Arithmetica inter DX & DQ. Probabitur itaque eodem modo Cicloidem eſſe tum interiorum tum exteriorum omnium brachiſtochronam. Quæ demonſtratio paulo aliter propoſita a Joh. Bernoullio (*a*) fit nunc omnium, quæ in uſu ſunt, planiſſima.

II.

(*a*) *Memoir. de l'Acad. des Sciences Paris, An.* 1718.

II.

De Tempore Oſcillationis per Arcum Circuli.

CUm aeris reſiſtentia in Pendulis minima adeo ſit, ut Cicloidis Iſochroniſmum vix turbet; propterea qui horologia non ſerviliter, ſed conſulto fabricantur, illud præſertim habent ante oculos, ut neglecta Hugeniana evolutione, quæ plurimis in praxi incommodis obnoxia eſt, tamen motus penduli quamproxime accedat ad motum corporis libere in Cicloide oſcillantis. Huc nempe ducit artificium, quo Grahamus pendula per dimidium Oſcillationis ab inæquali rotarum impulſu liberavit, huc tendit tum anchora altius fixa, tum ſuſtinens lamella elaſtica, & demum penduli ipſius longitudo producta. Utilitas vero hujuſmodi operum ſolet eo fere argumento concludi: „ quod ſi Circuli Cicloidem oſculantis in vertice ſumatur ar„ cus infiniteſimus, is quam minimum abeſt a Cicloide; unde Tem„ pus quoque deſcenſus per arculum quam minime abeſt a Tempore „ deſcenſus per Cicloidem; & propterea illud quoque conſtans erit, „ non ſecus ac iſtud ". At noſſe debent Mechanici, hoc argumenti genus quam lubricum ſit; decepit enim plurimos, qui ex Tempore per chordam evaneſcentem crediderunt inferri poſſe Tempus per arcum: Cicloidem vero adeo propius, quam *chordam*, *accedere* ad arcum oſculi, ut vim ratiocinii antehac fallacis reſtituat denique in veritatem; id ſane probandum eſſet, non ſupponendum. Præterea non video, quid ex illa Concluſione tuto deduci poſſit ad praxim, cum hæc utatur quantitatibus exiguis illis quidem, ſed numquam infiniteſimis: unde timendum ſupereſt, ne dum arcus oſculi creſcit, Tempus ipſius adeo velociter aberret a Tempore Cicloidis, ut diſcrimen inter hæc Tempora jam inſigniter auctum ſit, quando arcus ad tres gradus excreverit: quæ eſt circiter amplitudo Oſcillationis, tum in perfectioribus horologiis, tum in iis pendulis quibus Philoſophi

vim Gravitatis in diverſis Terræ locis dimenſi ſunt. Igitur ad pendulorum praxim ſolidius firmandam ſit.

LEMMA I.

Filo (*a*) ABQ *ex Curva* ABI *evoluto deſcribatur altera Curva* QZ; *tum producta* QB, *donec Tangenti alteri* AZ *occurrat in* C, *centro* C *radio* CQ *deſcribatur Arcus Circuli* QN; *Curva* QZ *jacebit intra Arcum* QN.

NAm AC+CB> AB; unde etiam AC+CQ, ſive AN> AB+BQ ſive AZ; adeoque punctum Z cadit ſuperius quam N. Cum vero radius CQ major ſit radio oſculi BQ, idcirco jam in Q arcus QN excurrere incipit extra Curvam QZ. In punctis intermediis idem probabitur.

LEMMA II.

Si Curvatura lineæ QZ *in progreſſu a* Z *ad* Q *ad eandem partem augeatur, atque e punctis* Q *&* Z *duæ tangentes ſibi occurrant, longior erit ea, quæ a puncto minoris Curvaturæ* Z *excitatur.*

AD *Arcum Circuli prius deſcripti* QN ex punctis Q, N duæ Tangentes ducantur, quæ in mutuo occurſu æquales erunt. Quod ſi nunc Tangens alia excitetur ex Z, hæc parallela erit ei quæ ex N, & major ipſa, & partem abſcindet Tangentis antea ductæ ex Q.

THEO-

(*a*) Figura 2.

THEOREMA II.

Sint duo Pendula (*a*) ABQ, AR *oſcillantia, alterum quidem in Cicloide* 2LQZ, *alterum vero in arcu* 2RZ *circuli oſculantis Cicloidem in vertice* Z, *minore tribus gradibus. Differentia Temporum inter alterutram Oſcillationem habebit ad Tempus in Circulo rationem minorem ea, quam habet reſpondens Sinus verſus ad ſexdecuplum Radii.*

Filum ABQ ponatur evolutum eſſe ex Cicloide altera ABI, donec pars BQ parallela ſit pendulo AR poſito ad extremitatem arcus ſui RZ. Ducatur Ordinata QHF, &, intra Circulum genitorum Cicloidis, chorda reſpondens HD; quæ ut notum eſt, parallela erit rectis QB, RA: itaque angulus ad periferiam HDZ=RAZ; & propterea arcus HZ continet tot gradus, quot integra oſcillatio 2RZ: quare FZ eſt Sinus verſus integræ oſcillationis, poſito ſinu toto OZ. Deſcribatur ut in Lemmate primo arcus QN; & Tempus in Cicloide majus erit tempore per QN (*Theorem. præced.*): Tempus vero idem in Cicloide minus eſt Tempore per RZ. Igitur minor eſt differentia Temporum inter RZ & Cicloidem, quam inter RZ & QN.

Nunc quia Arcus HZ eſt minor tribus gradibus per hypotheſim, ideo chorda DH, quæ eſt media Geometrica inter DF & DZ, haberi poterit pro media Arithmetica (*b*). Igitur $DZ - DH = \frac{1}{2} FZ$; & omnibus duplicatis fiet $AZ - BQ = FZ = AB$. Sed Tangens $BC > AC$ (*Lemma* 2.); & proinde a fortiori $BC > \frac{1}{2} AB$, ſeu

BC

(*a*) Fig. 3.

(*b*) *Error eſt circiter* 0,0000001, & *aliis quantitatibus ex oppoſito venientibus, abunde reparatur inferius.*

BC $>\frac{1}{2}$ FZ. Ergo addita BC ad BQ, fiet AZ — CQ $<\frac{1}{2}$ FZ. Dicatur W media Geometrica inter AZ & CQ, eaque pariter accipiatur pro media arithmetica: ſic demum fiet AZ — W $<\frac{1}{4}$ FZ. Conſtat vero ex Mechanicis Tempora per arcus circulorum ſimiles & ſimiliter poſitos eſſe in ratione ſubduplicata radiorum. Ergo Tempora per RZ, QN erunt ut AZ : W; & diviſim Differentia Temporum erit ad Tempus per RZ ut AZ — W : AZ; quæ ratio ex dictis minor eſt quam $\frac{1}{4}$ FZ : AZ, ſeu quam FZ : 16OZ. Et minor adhuc erit ratio differentiæ Temporum per RZ & QZ. *Q. E. D.*

Coroll. Sumpta ex Tabulis ratione ſinus verſi ad Radium; Aberratio Temporis inter circulum & Cicloidem, poſita amplitudine Oſcillationis duorum graduum, nondum poſt 18000 vibrationes perveniet ad integram Oſcillationem. Sique Oſcillationes circulares excurrant per arcum, nunc *trium graduum*, nunc duorum; Aberratio inter ipſas neque poſt 25000 vibrationes perveniet ad integram Oſcillationem. Quæ Aberratio duplo minor eſt ea, quam Eulerus (*a*) ſerie quadam analytica invenit.

Scholium. Si reſtituantur in Calculo Quantitates neglectæ in Theoremate, Aberratio longe minor fiet, & inter Arcus duorum & *trium graduum ad integram Oſcillationem* nondum aſcendiſſe deprehendetur poſt 37000 Oſcillationes. In *horologio* autem rite fabrefacto amplitudines Oſcillationum numquam inter ſe differunt gradu integro; ſed nunc cis nunc ultra datum terminum vix excurrendo, errores inter ſe oppoſiti fere deſtruuntur.

III.

(*b*) *Mechan. Tom.* 2. *n.* 173.

III.

De motibus rectilineis ad Centrum in hypotheſi Gravitatis acceleratricis Quadrato Diſtantiarum reciproce proportionalis.

MOtus hujuſmodi difficiliores ſunt ad explicandum, quam pro rei ipſius vel dignitate vel utilitate. Et prior quidem Newtonus eoſdem ex motibus Curvilineis, ingenioſe ſane, ſed quaſi ex obliquo determinavit: Ceteri poſt ipſum Mechanici aut ejuſdem veſtigiis inſtitere, vel ad Algebram delapſi ſunt, vel proportionem tantummodo aliquam poſuerunt, qua motus illi in unico deſcenſu variantur; qui abſolutam & cum reliquis immediate comparabilem menſuram ſinthetice & directe tradiderit, vidi neminem. Hæc autem eſt ut ſequitur.

PRÆNOTIONES.

1. MEnſura Temporis eſt linea, quam percurrit uniformiter Corpus aliquod, ex. gr. Index horologii. Quælibet pars hujus lineæ aſſumi poteſt pro *Unitate Temporis*; ſed ſemel aſſumpta reliquas omnes Menſuras neceſſario determinat.

2. Menſura Velocitatis eſt linea, quam Corpus aptum eſt deſcribere uniformiter, interea dum Index temporis movetur per hujus unitatem. Unitas temporis exprimit velocitatem, qua movetur Index temporis ipſius.

3. Menſura Gravitatis acceleratricis eſt Velocitas, quam tota unitate temporis uniformiter agens producit in Corpore. Quare cum Velocitas ſic genita deſignetur per lineam quamdam, per hanc Gravitas quoque repræſentatur.

4. Tempus, Velocitas, Gravitas, non ſunt ſpectandæ in ſe ipſis, ſed earum loco & nomine appellandæ ſunt & comparandæ lineæ, quæ ſunt menſura ipſarum: Sic enim priores illæ quantitates ad homoge-

geneam unitatem redactæ rationem inter ſe mutuo habere poterunt.

LEMMA III.

Velocitas poteſt duplum Areæ quæ oritur ex Gravitate ducta in Spatium (a).

Dum enim Velocitas V (b) ducit corpus per Incrementum Spatii dS, interea Gravitas G gignit Incrementum Velocitatis dV. Ergo $V : G = dS : dV$; adeoque rectangulum naſcens $VdV = GdS$: Et propterea triangulum rectangulum Iſoſceles habens V pro latere eſt æquale Areæ, quæ oritur ex Gravitate ducta in Spatium. Unde porro V^2 eſt duplum Areæ ipſius.

LEMMA IV.

Eſto Hyperbola Cubica (c) GX, *ad quam Ordinatæ* AG, SX *ſint inverſim ut quadrata Abſciſſarum* CA CS *a Centro* C. *Capiatur* SI *Media Geometrica inter* AG & SX. *Rectangulum* MISA *æquabit Aream* GXSA.

Ducta *PN* infinite proxima ipſi *SX*, capiatur PF Media inter AG & PN; tum erecta FED, demittatur GH, & jungatur GC. In triangulo GCA eſt $SL : AG\ (SH) = CS : CA = \sqrt{AG} : \sqrt{SX}$ (*ex hypotheſi*) $= \sqrt{SH} : \sqrt{SX} = SH : SI$ (*ſunt enim* $\div\!\div$ SH, SI, SX). Ergo quatuor rectæ SL, SH, SI, SX ſunt continue proportionales in ea ratione, qua ſe habet CS : CA. Præterea quoniam SI, PF ſunt mediæ ab AG ad SX, PN; ideo $SI : PF = \sqrt{SX} : \sqrt{PN}$

(a) *Newton prop. 39. l. p.*
(b) *Si figura dextre delineata apponatur, fiet demonſtratio Synthetica ſatis brevis.*
(c) Figura 2.

$\surd$PN = CP : CS; & diviſim CP : PS = SI : IE; & viciſſim (*poſita* CS *loco* CP) CS : SI = PS : IE. Cum vero probatum ſit CS : CA = SI : SX; hinc diviſim CS : SA = SI : IX; & viciſſim CS : SI = SA : IX. Ergo SA : IX = PS : IE; proindeque rectangulum DEIM = XNQI; Et addito communi IQPS, fie DFPSIM incrementum Rectanguli MS æquale reſpondenti Incremento XNPS Areæ GXS. Quare totum Rectangulum MS æquat Aream totam GXSA.

THEOREMA III.

Poſito quod Gravitas ſit Quadratis Diſtantiarum reciproce proportionalis, locus Velocitatis erit ad Hyperboliſmum Conchoidalem Ellipſeos.

Cadat Corpus (*a*) ex A ad Centrum C: ſintque AG, SX Gravitas in A & S; & locus Gravitatis erit hyperbola Cubica GXN. Sumpta Parametro AO = 2AG, & Axe AC deſcribe Ellipſim ARC; hinc porracta XS in R, duc CRT uſque ad Tangentem AT; tum cape SZ = AT; Curva quam punctum Z perpetuo tangit, eſt hyperboliſmus Conchoidalis Ellipſeos (*b*). Nunc in triangulo GCT eſt $SR^2 : AT^2 = CS^2 : CA^2$ = SL : SI (*Lemma* 4.) = US : MS. Ergo alternatim $SR^2 : US = AT^2 : MS$. Cumque ſit ex Conicis $SR^2 = 2VS$; propterea $SZ^2 = 2MS = 2GXSA$ (*Lemma* 4.) = Quadrato velocitatis in S (*Lemma* 3.). Igitur SZ eſt Velocitas excitata in Corpore dum cecidit ex quiete in A uſque ad S. *Q. E. D.*

D THEO.

(*a*) Fig. 2.
(*b*) *Sic vocatur a Newtono in Enumer. lin.* 3. *Ordinis, eſtque apud ipſum Species* 63.

THEOREMA IV.

Iiſdem poſitis, locus Temporis erit ad Cicloidem protractam in ratione inverſa axis ſecundi Ellipſeos antea deſcriptæ.

ESto (*a*) M unitas Temporis, ad quam reliquæ omnes menſuræ reducantur; ſitque OD axis ſecundus Ellipſeos AOCD, quam deſcripſimus in Theoremate præcedenti. Diametro AC deſcribatur ſemicirculus ABC, quo Genitore deſcribatur etiam Ciclois AEL. Ducta deinde ordinata SRBE, fiat OD : M = SE : SX; erit SX : SE in ratione inverſa ipſius OD ad unitatem. Productis (vel contractis) in eadem ratione ordinatis omnibus Cicloidis, orietur Curva AXV, quam voco *Cicloidem protractam in ratione inverſa axeos* OD. Ducatur IY infinite proxima priori SX; tum rectæ CRT, CBQ uſque ad Tangentem AQ; denique demittantur perpendicula EF, XZ.

In triangulo ACQ eſt AT : AQ = SR : SB = OD : AC (*ex Conicis*). Ergo viciſſim AT : OD = AQ : AC. Atqui ex natura Cicloidis Elementum EH eſt perpendiculare chordæ CB; ideoque triangulum EFH eſt ſimile alteri ACQ; & propterea EF : FH = AQ : AC. Igitur EF : FH = AT : OD. Aſt quoniam ex Conſtructione SE : SX = IH : IY = OD : M, ſunt etiam Differentiæ FH : ZY = OD : M. Ergo ex æquo EF (ſeu SI) : ZY = AT : M. Cum itaque ſit AT Velocitas Corporis in S (*Theor.* 3.), & M Velocitas Indicis deſignantis Tempus (*Prænot.* 2.); idcirco dum corpus cadens movetur per Incrementum Spatii SI, interea Index temporis procedit per Incrementum reſpondens ZY Ordinatæ SX. Proinde tota Ordinata SX eſt Tempus deſcenſus per totum ſpatium AS. *Q. E. D.*

IV.

(*a*) Fig. 4.

IV.

De motu Compoſito ex uniformi & accelerato.

QUando Galileana de motu Projectorum theoria proponitur, ſolet ingenioſis Adoleſcentibus ea plerumque ſe objicere difficultas, quæ ſub ipſa naſcentis theoriæ exordia deterruit Balianum (*a*), ne Parabolicam in eo motu ſemitam admitteret. Patet equidem duos impetus per latera parallelogrammi totos ſimul eodem puncto temporis excitatos in corpore componere motum unum per diagonalem, & curſu peracto corpus fore in parallelogrammi angulo oppoſito. Num vero Corpus adhuc futurum ſit in angulo eodem, cum duarum impulſionum altera initio tota imprimitur, altera autem venit ſucceſſu temporis partite ac paullatim, qualis eſt impetus a Gravitate acceptus: num hic quoque Corpus in exitu motus rediturum ſit ad extremum Diagonalis, a qua initio aberravit alio atque alio collineans; hoc ſane, ut ut leve dubium, peculiarem aliquam demonſtrationem deſiderare videtur.

THEOREMA V.

Si Gravitas ſit parallela ſibi; Corpus projectum ibit per angulum Parallelogrammi, cujus alterum latus Projectioni reſpondet, alterum vero Deſcenſui Gravitatis.

PRojiciatur Corpus ex A (*b*) per lineam A E, in qua inertiæ ſoli relictum pergeret uniformiter. Dividatur Tempus in partes æquales; ponatur Gravitas agere ad initium ſingularum hujuſmodi partium; & principio quidem imprimere Corpori impetum A R: Com-

D 2 po-

(*a*) *In Præfat. ad lib. 3. de Motu Naturali Grav.*
(*b*) Fig. 8.

poſitio motu, ad extremum primi Temporis Corpus erit in Angulo F parallelogrammi ARFB. Secundo Tempore corpus ex vi inſita iret per FG = AF; Sed ex novo Gravitatis impetu FQ, in exitu ſecundi Temporis corpus erit ad H angulum parallelogrammi FQHG. Ducantur GS, HT parallelæ ipſi AC. Quoniam FG = AF, erit etiam BC = AB, & RS = AR. Corpus igitur ſola Projectione agente foret poſt duas temporis partes in C: At ſola Gravitate urgente caderet, primo quidem tempore ex hypotheſi ad R, ſecundo autem ex inertia ad S, & præterea ex novo impulſu FQ, ſeu GH, ſeu ST ad T, ad extremum nempe parallelogrammi ATHC, in cujus angulo H nunc, compoſito motu, adeſt. Similiter corpus tertia parte Temporis iret per HI = FH, ſed Gravitate rurſus premente, flectit iter ad angulum L parallelogrammi AL, cujus latus AD projectioni reſpondet, AX vero deſcenſui. Atque ita porro. Minuantur particulæ temporis in infinitum, ut Gravitas continenter agat, & Poligonum AFHLN tranſibit in Curvam, ſed propoſitio adhuc manebit. *Q. E. D.*

Coroll. Vera eſt propoſitio, etiamſi Gravitas tendat ad Centrum, dummodo motus fiat per Tempus evaneſcens, ut Gravitas haberi poſſit pro parallela ſibi.

V.

De Problemate inverſo virium Centripetarum.

Problema hoc Mathematicorum animos multimodis exagitavit: quum enim illud Newtonus pro quacumque Gravitatis lege ſolviſſet in univerſum (*a*), in Sectionibus porro Conicis ſolutionem intulit ex Problemate directo. Sed de vi illationis litem ei intentavit Bernullius (*b*); ex quo poſtea Analyticam rei totius inquiſitionem plures, iique diverſo itinere ſunt perſecuti. Newtonus vero propoſitum tenuit; &

(*a*) *Prop. 41. lib. prim.*
(*b*) *Academie des Sciences Paris* 1710.

& ipſius argumentum etſi indirectum, illi quibus ſyntheſis placet, ad unum omnes amplexi ſunt; fortaſſe ut irrogatam Cl. Viro injuriam aliquatenus repararent. Atqui poteſt res eadem immediate, & independenter a problemate directo, & aliquanto facilius quam hoc per Syntheſim demonſtrari.

LEMMA V.

Si Gravitas ſit conſtans, Unitate temporis movet corpus a quiete per dimidium ejus lineæ, a qua Gravitas repræſentatur.

Poſitis enim nominibus, ut in Lemm. 3., erit ex eodem $2GS = V^2$. Sed poſt unitatem temporis $G = V$ [*Prænotion.* 3.]. Itaque poſt eandem unitatem $2S = V = G$.

THEOREMA VI.

Si Gravitas ſit inverſim ut quadrata diſtantiarum a Centro, & Velocitas projectionis ea fuerit, quæ ex finita altitudine uſque ad locum projectionis cadendo acquiritur, movebitur Corpus in Ellipſi.

Projiciatur Corpus (*a*) ex S directione & Velocitate SZ, ea quidem, quam cadens per AS aquiſivit. Producta AS uſque ad Centrum C, fiat angulus $RSZ = ZSC$, & protracta RS, donec $SF = SA$, Focis F, C & axe $DB = AC$ deſcribatur Ellipſis: hæc tranſibit per S, quoniam $DB = CS + SF$: & quoniam duæ inclinatæ ex Focis FS, CS continent angulum æqualem cum recta ZS, hæc idcirco tanget Ellipſim in S. Ducantur duo Diametri conjugatæ SO, MO; per punctum Z agatur $CHZE = CA$; & per H, HQT paral-

(*a*) Fig. 6.

rallela Tangenti ZS. Sit præterea GX locus Gravitatis, & Rectangulum ASIV æquale Areæ ASXG, ut in Theoremate tertio. Aſſumatur denique Unitas temporis evaneſcens, & evaneſcentes quoque erunt lineæ SZ, SX, quæ Gravitatem & Velocitatem metiuntur in S (*Prænot. prima*). Dico jam Corpus projectum ut antea, motum iri in Ellipſi SHPMB &c.

Etenim in triangulo SLO eſt $LS : 2QS = OS : 2TS = OS^2 : 2OS \times TS = OS^2 : YT \times TS = MO^2 : HT^2$ (*ex conicis*) $= MO^2 . ZS^2$ (*differunt enim* HT^2, ZS^2 *quantitate infiniteſima tertii ordinis*) $= MO^2 : 2AI$ (*lemm.* 3 *&* 4) $= CS \times SA : 2AI$ (*ex conicis*) $= CS : 2SI$. Ergo $CS : SI = LS : QS$; & viciſſim $SI : 2QS = CS : 2LS = CS : CA$ (*ex conicis*) $= SI : SX$ [*lemm.* 4]. Cum itaque ſit $SI : 2QS = SI : SX$, ideo $2QS = SX$; & propterea Gravitas SX, unitate temporis, qua ſupponi poteſt uniformiter agere, impellit Corpus ex S in Q [*lem.* 5]. Sed Projectio eadem unitate ponitur impellere corpus ex S in Z. Perget igitur Corpus ex S in H [*Theor.* 5]; ibique Velocitatem habebit, quam ſibi comparaſſet cadendo per EH [*Nevvton. prop.* 40. *lib.* 1.]; atque hac Velocitate rurſus projicietur a vi inſita per Tangentem novam HK. Proinde ſimili argumento demonſtrabitur poſt ſecundam temporis Unitatem Corpus fore adhuc in Ellipſi in P. Et ſic in infinitum. *Q. E. D*

Coroll. 1. Si fuerit $AS = SC$, & SZ perpendicularis ad AC, tunc Focus F *ſuperincidet Foco* C, & Ellipſis evadet in Circulum; adeoque Corpus projectum Velocitate, quam ex dupla altitudine cadens aquiſiviſſet, movebitur in circulo. Id quidem ſi projectio fiat perpendiculariter ad Radium vectorem; alioquin, velocitate eadem, movebitur per extremitatem axis ſecundi Ellipſeos alicujus.

Coroll. 2. Si fuerit AS infinita, Focus F evaneſcet, & Corpus projectum Velocitate, quam ex infinita altitudine cadens aquiſiviſſet, movebitur in Parabola, cujus Focus C. Ad quem Caſum Orbitæ Cometarum proxime accedunt.

Coroll. 3. Pariter ſi AS ad SC minimam rationem habuerit, El-

lip-

lipſis circa Verticem D fere congruet cum Parabola Focum habente in F. Qui eſt Caſus theoriæ Galilei.

Coroll. 4. Si velocitas projectionis major fuerit, quam quæ ex infinita altitudine uſque ad S cadendo adquiritur; fiat

$$\frac{1}{2} SZ^2 - SC \times SZ : SC^2 = SX : W;$$ tum capiatur $SR = CS + W = SA$.

Puncta C & R erunt Foci, & W axis hyperbolæ, in qua Corpus movebitur.

Coroll. 5. In Parabola puncto A ad infinitum remoto, Area Gravitatis ASXG fiet æqualis rectangulo $SX \times SC$, & propterea erit ut $\frac{1}{SC}$. Igitur quadratum Velocitatis, quod areæ predictæ eſt duplum, variatur in ratione inverſa Radii vectoris. Sed & reliqua a Newtono, Moivreo, aliiſque demonſtrata de Velocitate Corporum in Sectionibus Conicis, ex præmiſſo Theoſemate, facili negotio, deducuntur.

VI.

De Balliſtica.

Quamvis Balliſtica Ars plurimorum ſtudiis poſt Galileum adeo fuerit agitata ut, præſertim poſt *Simpſonii labores, jam fere* nihil novi ad eam accedere poſſe videatur, ſive argumentum ipſum ſpectemus, ſive methodum; attamen illa demum mihi ſimpliciſſima dicitur Regula, quæ reliquas omnes ſub unica & proportione & plana demonſtratione concludat. Quid hic in Regulæ hujus ſimpliciſſimæ inquiſitione profecerim, ſi quid omnino profeci, *res ipſa* indicabit.

THEO-

THEOREMA VII.

Quadruplum altitudinis projectionem generantis eſt ad diſtantiam Scopi, ut Quadratum ſinus declinationis Scopi eſt ad Rectangulum ſinuum elevationis & declinationis Tormenti.

Rectæ SB, CD (*a*) ſunt Horizonti perpendiculares; punctum D eſt Scopus attingendus; Tormentum poſitum in B collineat cum recta BC. Voco angulum SBD *declinationem Scopi*; SBC *declinationem tormenti*; CBD *elevationem tormenti* ſupra Scopum. Sit AB altitudo ex qua cadens corpus aquirit velocitatem projectionis; quadruplicetur hæc in SB, & ducatur SC. Quoniam Corpus Velocitate aquiſita in B, & Tempore deſcenſus per AB deſcriberet uniformiter ſpatium 2AB; idcirco Tempus lapſus per AB eſt ad Tempus motus uniformis per BC, ut 2AB : BC. Sed Tempus motus uniformis per BC eſt æquale Tempori deſcenſus per CD (*Theor.* 4). Ergo ſubſtituendo, Tempus lapſus per AB eſt ad Tempus per CD, ut 2AB : BC. Sed in deſcenſu Gravium ſpatia ſunt, ut Quadrata temporum. Ergo $AB : CD = 4AB^2 : BC^2$, & quadruplicatis antecedentibus $SB : CD = SB^2 : BC^2$; adeoque $SB : BC = BC : CD$ (*b*). Cumque ſit præterea angulus $SBC = BCD$, erit triangulum SBC ſimile alteri BCD; & erit Sin. SCB = Sin. CDB = Sin. SBD; deinde Sin. S = Sin. CBD; denique Sin. BCD = Sin. CBS. Nunc igitur, quoniam latera in triangulo ſunt, ut ſinus angulorum, quibus opponuntur; ideo in triangulo priori erit SB : BC = Sin. SBD : Sin. CBD; in poſteriori autem BC : BD = Sin. SBD : Sin. SBC. Itaque compoſitis rationibus fiet $SB : BD = (\text{Sin. SBD})^2 : \text{Sin. CBD} \times \text{Sin. SBC}$. *Q.E.D.*

Co-

(*a*) Fig. 5.

(*b*) *Suppoſito motu Projecti in Parabola, poterat hinc demonſtratio brevius incipere: ſed malui theoriam totam ſine ſectionibus Conicis probare, quod & Simpſonius fecit.*

Coroll. 1. Rectangulum Sin. CBD $\times$ Sin. SBC evadit omnium maximum, quando recta BC biſecat angulum SBD (*a*). Ergo in eo caſu Amplitudo jactus BD eſt maxima.

Coroll. 2. Sit BD parallela Horizonti. In caſu amplitudinis maximæ fit $SB : BD = 1 : (\text{Sin. } 45^\circ)^2$. Atqui $(\text{Sin. } 45^\circ)^2 = \frac{1}{2}$ Ergo $BD = \frac{1}{2} SB = 2AB$. Nempe amplitudo maxima Horizontalis eſt dupla altitudinis projectionem generantis.

Coroll. 3. Sit BD inclinata ad Horizontem. In caſu amplitudinis maximæ erit $SB : BD = (\text{Sin.SBD})^2 : (\text{Sin.} \frac{1}{2} \text{SBD})^2$. Ex quo habetur ratio Amplitudinis maximæ Horizontalis ad Inclinatam.

Coroll. 4. Sit rurſus BD Horizontalis; Proportio Theorematis fit ſimplicior. Tunc enim eſt $SB : BD = 1 : \text{Sin. CBD} \times \text{Coſ. CBD} = 1 : \frac{1}{2} \text{Sin. } 2\text{CBD}$.

Coroll. 5. Si inclinatâ BD ad Horizontem, datiſque AB, BD, SBD, quæratur SBC (qui, ut conſtat, eſt caſus omnium difficillimus); ex Theoremate dabitur Sin. SBC $\times$ Sin. CBD; eſt autem ex Trigonometria $\text{Sin. SBC} \times \text{Sin. CBD} + \frac{1}{2} \text{Coſ. SBD} = \frac{1}{2} \text{Coſ. (SBC} - \text{CBD)}$: quare datur Differentia inter *SBC* & *CBD*; datur vero & horum ſumma SBD. Ergo dantur anguli ipſi: qui cum poſſint permutari inter ſe, duæ erunt Projectionis collineationes ad eundem ſcopum feriendum.

Coroll. 6. In caſu Corollarii præcedentis, ſi Rectangulum ex pro-

 por-

(*a*) *Satis id patet; qui tamen demonſtrare voluerit, dato arcui, cui inſiſtit angulus SBD ſubtendat chordam; hanc radio BC inæqualiter ſecet. Sinus partiales ſuper hunc radium demiſſi minores erunt ſegmentis chordæ: rectangulum autem ſegmentorum tunc maximum eſt cum chorda biſecatur; tuncque ſinus ſunt ſegmenta ipſa.*

portione inventum, majus fuerit quam $(\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ \text{SBD})^2$, Problema eſt impoſſibile, & prodibit in Calculo Coſ. (SBC — CBD) major Radio.

Scholium. In toto Problemate Balliſtico quattuor adſunt quantitates. 1. Altitudo AB producens velocitatem Projectionis, & exprimens vim pulveris Pirii; quæ ex unico experimento cognoſci poteſt per Coroll. 2. vel tertium. 2. Diſtantia ſcopi BD. 3. Declinatio ſcopi SBD. 4. Declinatio tormenti SBC. Horum quattuor ſi tria dentur, quarta datur illico ex proportione Theorematis, præter Caſum Corollarii quinti; qui tamen & ipſe ſolvitur in Plano Horizontali per Coroll. 4., in Plano vero inclinato per idem Coroll. 5. Opportune demum monet Simpſonius, ab experimento Corollarii ſecundi vim pulveris pirii prodire minorem juſto, propter aeris reſiſtentiam: & proinde ſic ſatis corrigi Aberrationem, quæ ex eadem aeris reſiſtentia oriri poſſet in praxi *balliſtica*.

VII.

De duplici projectione duorum corporum ſe mutuo attrahentium.

UT duo *Planetæ* ad ſe invicem graves revolvantur in Curvis ſimilibus circum ſe mutuo & circum Gravitatis centrum commune deſcriptis, cenſent plures, iique graviſſimi viri opus eſſe duplici Projectione, quæ utrique Planetæ diſtincte impreſſa fuerit, ab initio motus, in partes ad invicem adverſas, & ipſi corporum Maſſæ contraria proportione reſpondeat. Quam opinionem dum oſtendo, aliqua ex parte minus veram eſſe, nihil hinc præſtantium Virorum gloriæ detractum velim, quorum inſignia in hanc Phyſicæ partem merita, & mathematicum ingenium prorſus magni habenda ſunt.

THEO-

THEOREMA VIII.

Corporum duorum gravitate ſe invicem petentium ſi unum projiciatur, revolventur ambo in figuris ſimilibus circa centrum commune gravitatis deſcriptis.

DUo Corpora [a] T & S habentia centrum Commune gravitatis in C projiciantur velocitatibus oppoſitis TU, LA, quæ ſint reciproce proportionales Maſſis: Ducta AU tranſibit per C; & illa duo Corpora deſcribent & circum ſe mutuo & circum Centrum C figuras ſimiles (*Nevvton. lib. prim. prop.* 57.). Agatur nunc TX parallela ipſi UA, & ponatur ſpatium PQ, cui ipſa corpora incluſa ſunt, jam ab initio motum eſſe uniformiter, una cum ipſis, verſus Q, velocitate UT. Permanebunt adhuc iidem motus duorum corporum inter ſe (*Nevvton. lib. prim. prop.* 63.). Aſt in hac ſpatii moti hypotheſi, Corpus T in ſpatio abſoluto projectum non fuit, ſed tantummodo corpus L velocitate LX. Igitur ex ſola projectione LX corpori L impreſſa ambo corpora L & X deſcribent figuras ſimiles circum gravitatis centrum commune C, quod interea progredietur uniformiter in directum Velocitate CZ. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Si Maſſa Telluris ſeptingenties major fuiſſet quam nunc, & Luna in conjunctione poſita, quum primum motus ab initio mundi ipſis impreſſus fuit; unica Telluris projectio ſufficiebat, ambobus corporibus tum circa Solem, tum circa ſe mutuo convertendis. In ea pariter, quam nunc habent, quantitate materiæ, eodem ut prius aſpectu ad invicem ſitæ, & tantummodo circa Solem, inæquali tamen velocitate projectæ, cæpiſſent hinc etiam impetum revolvendi circa ſe invicem, eo ipſo, quo nunc girantur, modo.

Coroll. 2. Quum primitus Planetæ & Cometæ omnes impulſi fuerunt; ea potuit eſſe poſitio ipſorum, ut Sol nulla ſibi propria ime-

E 2 me-

(a) Fig. 9.

mediata ac diſtincta impulſione indigeret: & ita ut centrum commune ſiſtematis Solaris nullum hinc acciperet motum rectilineum; vel nonniſi lentiſſimum, & Aſtronomis inobſervabilem propter immanem Fixarum diſtantiam. Poſſet vero motus centri ipſius citus eſſe, & tamen inobſervabilis; dummodo ſupponantur ſyſtemata Fixarum omnium ſic ab initio projecta fuiſſe, ut ad eandem cum Centro noſtro plagam per immenſitatem ſpatii uniformiter moveantur.

Scholium. Nemo Religionem injiciat, ſi quis motum Telluris, tamquam Theſim, admittere velit. Nam 1. Famoſum illud Cardinalium Decretum ex Indice Romano Librorum prohibitorum, juſſu Benedicti XIV. expunctum fuit; quod idem ſignificat ac abrogatum fuiſſe. 2. Celebriores per orbem Catholicum Academiæ mutuam corporum cœleſtium Gravitatem, tamquam Theſim admittunt; quod abſque Telluris motu ſtare nequit: igitur Interdictum illud contraria Eccleſiæ conſuetudo antiquavit. 3. Si phœnomena omnia aberrationis Fixarum, & Ecclipſes Satellitum Jovis conjungantur inter ſe; ſi ad Telluris Figuram addas Gravitatem ſub Æquatore imminutam & præceſſionem Æquinoctiorum; duo argumenta conficies ad firmandum Telluris motum, quibus nulla in Phyſicis rebus demonſtratio obtineri poteſt ſolidior. Aſt cum hujuſmodi probatio fuiſſet inventa, Decretum ceſſaturum eſſe promittebant vel ipſi præterito ſæculo Theologi. 4. Interdictum illud non Fidem ſpectat, ſed ſolis temporum, quibus promulgatum fuit, circumſtantiis, debetur; neque enim infallibile eſt in rebus Fidei paucorum Theologorum oraculum. De tota hac cauſa conſulatur Murator. *de Ingen. moderat. cap.* 22., & la Lande *Aſtronom. Tom. prim. n.* 1100.

VIII.

De motu Planetarum per Apſides.

PRæ ceteris quæ Caſtellus [*a*] Newtonianis objecit, aliqua veri ſpecie commendatur illud: „ Cur Gravitas, quæ cum debilior eſſet „ in Aphelio, aſſidue tamen inſiſtens admovit Planetam Soli ad perihelium uſque; cur, inquam, eadem Gravitas facta nunc fortior „ non pergat in propoſita admotione Planetæ, ſed ſinat illum rurſus aufugere a Sole, & redire eo unde illum antea vi longe minore detraxerat? ". Nodum hunc, quem Sigorgnius (*b*) quidem & Mac-laurinus (*c*) ex vis centripetæ & centrifugæ temperatione ſolverunt, Boskovichius [*d*] autem ex ipſa Sectionum Conicarum natura ſatis eleganter recidit, hic ita explicare in animo eſt, ut rei veritatem, non modo in curvis ſecundi gradus, ſed in univerſis vel ille intelligat, cui ſola compoſitio motus, & prima Geometriæ elementa innotuerunt.

THEOREMA IX.

Poſita quacumque lege Gravitatis tendentis ad centrum; ſi corpus projectum ita moveatur, ut Curva ab ipſo deſcripta fiat alicubi perpendicularis Radio vectori; movebitur inde Corpus in alio ramo Curvæ, qui ſimilis ſit priori & ſimiliter poſitus.

TEndat quacumque diſtantiarum lege ad centrum F Gravitas; [*e*] quam ponemus primo agere interrupte per æqualia temporis intervalla, ut inflectat iter corporis venientis ex R per latera Poligoni alicujus

(*a*) *Le vray Syſtème de M. Newton.*
(*b*) *Inſtitution. Newton.*
(*c*) *In expoſition. Philoſ. Newton.*
(*d*) *De Inæqualit. Jovis & Sat.*
(*e*) Fig. 7.

jus RS, SV, VZ &c. Sit latus aliquod ZB Poligonih ujus bifariam & perpendiculariter ſectum a recta FA, quæ ad ipſum demittitur ex centro F. Sint deinde SP, VQ, ZO impetus, quos Gravitas facit temporibus præcedentibus tranſitum per A; temporibus vero ſubſequentibus hunc tranſitum fiant impetus BL, DI &c. Compleantur parallelogramma PT, QX, OY, LC, &c.; & facile patet quodlibet ex hiſce parallelogrammis habere latus æquale Diametro præcedentis, nempe VX = SV, ZY = VZ, BC = ZB, DE = BD &c. Nam ex. gr. corpus ex ſola vi inſita excurriſſet per VX velocitate & Tempore eodem, quo venerat per SU; ſed Gravitas eodem tempore flectit illud per VZ. Atque ita de reliquis. Nunc quoniam FA ſecat ZB bifariam & perpendiculariter, ideo FZ = FB; unde æquales ſunt impetus Gravitatis ZO, BL. Igitur in triangulis OZB, LBD latus ZO = LB; latus ZB = BC = LD; angulus OZB = FBZ = DLB: Ergo eſt quoque BD = OB = ZY = UZ; & angulus LBD = BOZ = FZU. Ergo duæ rectæ BD, UZ per quas corpus movetur primo tempore poſt tranſitum per A, & ultimo tempore ante tranſitum ipſum; duæ inquam, rectæ BD, UZ æquales ſunt inter ſe, & ſimiliter hinc inde poſitæ ad perpendicularem FA. Præterea duo triangula FZU, FBD quæ habent latera æqualia circa angulos æquales Z, B, habebunt etiam FD = FU, & angulum FDB = FUZ. Ergo ut prius erit DI = UQ; triangulum IDH = QUZ; duæ rectæ DH, SU ſecundo & penultimo tempore deſcriptæ æquales erunt inter ſe, & ſimiliter poſitæ hinc inde a perpendiculari FA. Et ſimili pacto demonſtratio ſemper progredietur. Minuantur intervalla temporis in infinitum, & orietur ramus Curvæ ABDHG ſimilis priori AZUSR, & ſimiliter poſitus reſpectu ad Diametrum FA: perque hunc Ramum movebitur corpus, inverſo temporum ac velocitatum ordine; Et punctum A erit Apſis trajectoriæ ipſius. *Q. E. D.*

IX.

IX.

De æquipollentia Potentiarum.

Æ Quipollentia potentiarum in Parallelogrammo, inſigne prorſus principium & per totam quam latiſſime patens Mechanicam, primum rigoroſe demonſtrata fuit a Dan. Bernullio [*a*]; nam quæ ex compoſitione motus vulgo ducitur argumentatio, ſeverioribus Geometris non ſatis placuiſſe videtur. Sed Bernullii ratiocinium vix ſeptem integris Theorematis abſolvitur; & qui illud Synthetice explicavit, Riccatus (*b*) ad decem uſque Theoremata rem totam produxit: Formulæ vero Algebraicæ Alambertii [*c*] & Equ. de Foncenex (*d*) cum dependeant a Logaritmis & calculo integrali, minus ideo videntur faciles, quam ut adoleſcentibus tradi poſſint in primo ipſo Mechanices limine: Infirma denique eſt quæ alibi (*e*) traditur, ceteroquin breviſſima demonſtratio. Tentandum eſt igitur, num res eadem ex primis Geometriæ elementis perſpicue ſimul ac ſolide concludatur.

THEOREMA X.

Diagonalis Rhombi repræſentat Potentiam æquipollentem Potentiis duabus, quæ repræſentantur per latera.

E Sto Semicirculus (*f*) FQG centro A deſcriptus, & bifariam ſectus a linea AK. Ponatur ad Centrum angulus variabilis BAC, biſectus & ipſe a linea AK; cujus latera AB, AC exprimant duas poten-

(*a*) *Academ. Petropol. Tom.* 1. *p.* 117.
(*b*) *Academ. Bononienſ. Tom.* 5. *part.* 2. *pag.* 186.
(*c*) *Opuſcules Tom* 6.
(*d*) *Memoires de l' Academie de Turin Tom.* 2.
(*e*) *Journal des Sçavans Juin* 1764.
(*f*) Fig. 10.

tentias æquales inter ſe & applicatas corpori poſito in A. Jam 1. Quicumque fuerit angulus BAC, Potentia æquipollens duabus AB, AC jacebit ſuper linea AK. 2. Quum angulus BAC, punctis B & C accedentibus ad invicem, evanuerit in Q, Potentia æquipollens duabus AB, AC erit $= AB + AC$. 3. Quum e contra angulus BAC excreverit ad duos rectos in FAG, æquipollens duabus AB, AC evaneſcet. 4. Ponantur aliæ duæ vires AD, AE, ipſæ quoque æquidiſtantes hinc inde a Q, quæ una cum duabus præcedentibus agant in corpus A. Biſecentur Arcus DB, CE rectis AM, AN; ſitque AM æquipollens duabus AD, AB; AN æquipollens duabus AC, AE; AX æquip. AD, AE; AZ æquip. AB, AC; denique AK æquip. AM, AN. Erit $AK = AX + AZ$. Nam AK æquipollet duabus AM, MN; quæ æquipollent quattuor Potentiis AD, AB, AE, AC; harum prima & tertia æquipollent AX; ſecunda vero & quarta ipſi AZ. Ergo AK æquipollet duabus AX, AZ; quæ cum inter ſe omnino conſpirent, idcirco $AK = AX + AZ$.

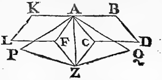
Sint nunc (*a*) AB, AC latera Rhombi ABR ſub angulo variabili BAC, qui, ut prius, biſecetur a linea AI. Hic quoque 1. Quicumque fuerit angulus BAC, Diagonalis rombi jacebit ſuper linea AI. 2. Quando angulus BAC, punctis B & C accedentibus ad invicem, evanuerit, erit Diagonalis $AR = AB + AC$. 3. Quando e contra angulus BAC excreverit ad duos rectos, Diagonalis AR evaneſcet. 4. Ponatur alter Rhombus ADLE, cujus duo latera AD, AE æquidiſtent ab AI; & compleantur rhombi ADHB, ACET, AHIT: Oſtendendum eſt hic quoque eſſe $AI = AL + AR$. Deſcribatur ſuper HI rhombus $HQIO = ADHB$, & ducatur QR. Quoniam eſt angulus $HIA = HAI$, & $OIH = BAH$; erit etiam reliquus $OIA = BAR = BRA$: itaque OI non ſolum æqualis eſt, ſed etiam parallela ipſi BR; atque hinc ipſæ quoque HQ & BR ſunt æquales & parallelæ; unde ita ſunt quoque inter ſe HB (ſeu DA) & QR. Ergo triangulum Iſoſceles ADL æquat

(*a*) Fig. 11.

æquat prorſus alterum RQI; adeoque AL = RI. Ergo cum ſit AI = RI + AR, erit etiam AI = AL + AR.

Diagonalis igitur AR iiſdem loco & Quantitate incipit, atque æquipollens Potentiis repræſentatis per latera AB, AC; iiſdem loco & Quantitate deſinit; eadem denique lege & directione ſemper procedit. Quare Diagonalis AR repræſentat æquipollentem ipſam. *Q.E.D.*

Coroll. Agant in puncto A quattuor Potentiæ AK, AF, AC, AB; quarum binæ AK, AB æquales ſint inter ſe & oppoſitæ; binæ vero AF, AC æquales pariter inter ſe æquidiſtent ab AZ. Compleatur Rhombus AFZC; & erit AZ æquipollens

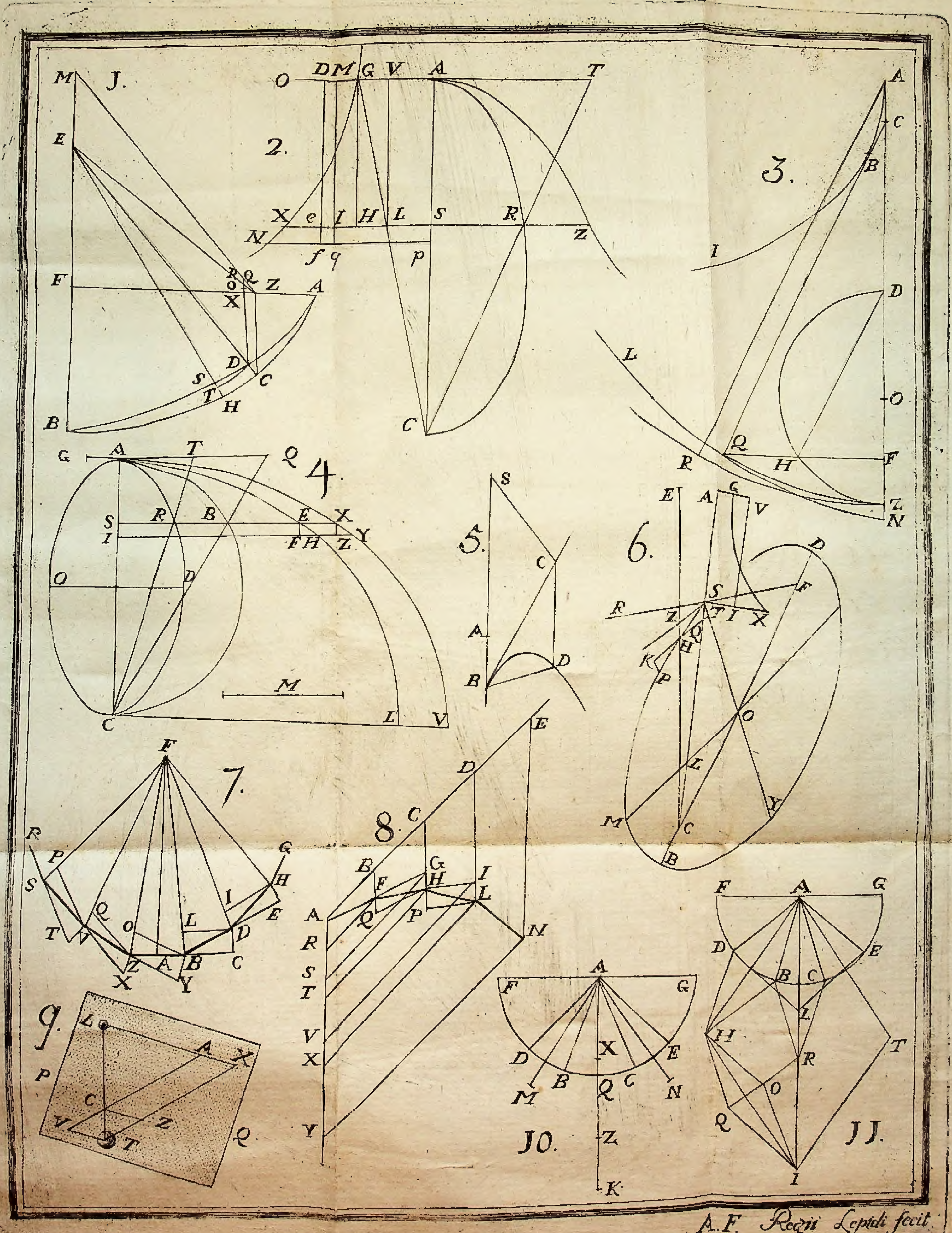


quattuor AK, AB, AF, AC. Sint nunc, AP quidem æquipollens duabus AK, AF; AQ vero æquipollens duabus AC, AB: patet fore AP = AQ; angulum PAZ = ZAQ; & AZ æquipollere duabus AP, AQ. Igitur APZQ eſt Rhombus: & propterea puncta P & Q cadunt ſuper linea LD: Ideſt in quolibet parallelogrammo ACBD æquipollens AQ terminatur ad punctum aliquod in latere CD.

Similiter demonſtrabitur, ipſam AQ terminari ad aliquod punctum in latere DB. Ergo terminatur ad punctum commune D; ideoque eſt ipſa Diagonalis Parallelogrammi.

FINIS.

Nobile Collegium Sancti Caroli Mutinense
A. 3899.



A.F. Regii Lepidi fecit.

Nobile Collegium Mutinense - Sancti Caroli -